Оглавление

1. k-значная логика. **3**

1.1. Функции k-значной логики. 3

1.1.1. Класс M_0. 3

1.1.2. Формулы и суперпозиции. 3

1.1.3. Полнота и выразимость для функциональных систем. 4

1.2. Теорема Кузнецова. 4

1.2.1. R-множества. 4

1.2.2. Классы сохранения. 5

1.2.3. Лемма о равенстве $U(R) \cap P_k(x_1, x_2) = R$ 5

1.2.4. Лемма о неполноте в P_k $(k > 2)$множества $M \cup \{e_1(x_1, x_2), e_2(x_1, x_2)\}$ при неполноте M. 5

1.2.5. Критериальные системы в P_k. Теорема Кузнецова. 6

1.2.6. Алгоритм проверки на полноту конечных систем в P_k. 6

1.3. Теорема Слупецкого. 7

1.3.1. Лемма Яблонского. 7

1.3.2. Лемма о равенстве $\left[P_k(x) \cup P_k^B\right] = P_k^{|B|} \cup P_k(x)$. 8

1.3.3. Лемма о включении $[P_k(x) \cup \{f\}] \supseteq P_k^{E_2}$ при $k > 2$, f - существенной функции. 9

1.3.4. Лемма о включении $[P_k(x) \cup \{f\}] \supseteq P_k^{l+1}$ при $k > 2$, f - существенной функции, $1 < l < k$ и включении $[P_k(x) \cup \{f\}] \supseteq P_k^l$. 11

1.3.5. Теорема Слупецкого. 12

1.4. Особенности k-значной логики. 12

1.4.1. Теорема о полноте класса полиномов в P_k. 12

1.4.2. Континуальность множества замкнутых классов в P_k при $k > 2$. 13

Глава 1.

k-значная логика.

1.1. Функции k-значной логики.

1.1.1. Класс M_0.

$E_k = \{0, 1, \ldots, k\}$
P_k — множество функций $f : \underbrace{P_k \times P_k \times \ldots \times P_k}_{n} \longrightarrow P_k$, где $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$
$M_0 = \{0, 1, \ldots, k, \max(x, y), \min(x, y), J_0(x), J_1(x) \ldots J_{k-1}(x), j_0(x), j_1(x) \ldots j_{k-1}(x)\}$
Обозначения: $x \vee y \stackrel{\text{def}}{=} \max(x, y)$, $x \& y \stackrel{\text{def}}{=} \min(x, y)$

$$J_i(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 0, & x \neq i \\ k-1, & x = i \end{cases}$$

$$j_i(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 0, & x \neq i \\ 1, & x = i \end{cases}$$

Класс M_0 является полным. Пусть $f \in P_k$ — функция от n существенных переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Тогда выполнено равенство:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \max_{\sigma_i \in E_k} \min(J_{\sigma_1}(x_1), J_{\sigma_2}(x_2), \ldots, J_{\sigma_n}(x_n), f(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)) \qquad \square$$

1.1.2. Формулы и суперпозиции.

Пусть $M \subset P_k$. Определим множество $\langle M \rangle$ формул над M.

1) Если $f \in M$, то $f \in \langle M \rangle$.
2) Если $f \in M$, а G_i — либо лежит в $\langle M \rangle$, либо переменная, $i = 1, 2, \ldots, n$, то
$g(x_1, x_2, \ldots, x_m) \stackrel{\text{def}}{=} f(G_1(x_1, x_2, \ldots, x_m), G_2(x_1, x_2, \ldots, x_m), \ldots, G_n(x_1, x_2, \ldots, x_m))$
тоже лежит в $\langle M \rangle$.

3) Других формул нет.

Суперпозиция над M — это функция, реализуемая формулой над M. $[M]$ — множество суперпозиций над M. Функциональная система, порождённая множеством M:

$$\mathcal{M} = (M, \langle M \rangle, [M])$$

□

1.1.3. Полнота и выразимость для функциональных систем.

Функциональная система $\mathcal{M} = (M, \langle M \rangle, [M])$ называется полной, если $[M] = P_k$.

Теорема: система, порождённая множеством $M = \{x \oplus 1, \max(x, y)\}$, полна.

Доказательство:

- Получаем константы: $k - 1 = \bigvee_{i=0}^{k-1} (x \oplus i)$
  $0 = k - 1 \oplus 1$,
  $1 = 0 \oplus 1$, и т. д.
- $J_i = (\max_{i \oplus s \neq k-1} (x \oplus s)) \oplus 1$
- Обозначим через $z_i^j(x)$ следующую функцию: $z_i^j(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 0, & x \neq i \\ j, & x = i \end{cases}$.
  Тогда верно равенство: $z_i^j(x) = \max(J_i(x), k - j - 1) \oplus j \oplus 1$. Пусть f — функция одной переменной. Тогда $f(x) = \bigvee_{i=0}^{k-1} (z_i^{f(i)}(x))$. Таким образом, все функции одной переменной лежат в $[M]$, в частности, функция $\sim x \stackrel{\text{def}}{=} k - 1 - x$. Но $\min(x, y) =\sim \max(\sim x, \sim y)$. Значит, $M_0 \subset [M]$ и система $\mathcal{M}$ полна.

1.2. Теорема Кузнецова.

1.2.1. R-множества.

Пусть $T \subset P_k$ —множество функций от (не обязательно существенных) переменных $x_1, x_2, \ldots, x_m$. Функция f от n переменных сохраняет множество T, если $\forall (h_1, h_2, \ldots, h_n) \in \underbrace{T \times T \times \ldots \times T}_{n} (\lambda \in T)$, где $\lambda(x_1, x_2, \ldots, x_m) \stackrel{\text{def}}{=}$

$f(h_1(x_1, x_2, \ldots, x_m), h_2(x_1, x_2, \ldots, x_m), \ldots, h_n(x_1, x_2, \ldots, x_m))$ Обозначим через $P_k(x_1, x_2)$ множество функций k-значной логики от не более, чем двух существенных переменных. Множество $R \subset P_k(x_1, x_2)$ называется R-множеством, если:

- $R \neq P_k(x_1, x_2), R \neq \varnothing$
- $\{e_1, e_2\} \subset R$, где $e_1(x_1, x_2) \stackrel{\text{def}}{=} x_1, \quad e_2(x_1, x_2) \stackrel{\text{def}}{=} x_2$ — селекторные функции.
- Каждая функция из R сохраняет R (R сохраняет себя).

R-множеств конечное число. $\mathcal{R}_k = \{R_1, R_2, \ldots, R_{\rho(k)}\}$ — множество всех R-множеств. $\rho(k) \leqslant 2^{k^{k^2}}$

1.2.2. Классы сохранения.

Пусть $T \subset P_k$ Обозначим через $U(T)$ класс сохранения множества T, т. е. множество функций, сохраняющих множество T.

Теорема. Пусть $R_i \in \mathcal{R}$. Тогда $U(R_i)$ — замкнутый класс.

1.2.3. Лемма о равенстве $U(R) \cap P_k(x_1, x_2) = R$

Доказательство. Обозначим $Q = U(R) \cap P_k(x_1, x_2)$

- $Q \supseteq R$ — очевидно.
- $Q \subseteq R$. Доказываем от противного. Пусть $Q \nsubseteq R$, т. е. $\exists f \in Q (f \notin R)$. Но $f(x_1, x_2) = f(e_1(x_1, x_2), e_2(x_1, x_2))$. Т. к. $f \in Q$, то $f \in U(R)$, следовательно, т. к. селекторные функции лежат в R, то $f \in R$ — противоречие. $\square$

1.2.4. Лемма о неполноте в P_k $(k > 2)$множества $M \cup \{e_1(x_1, x_2), e_2(x_1, x_2)\}$ при неполноте M.

Доказательство. От противного: пусть $\exists M(([M] \neq P_k) \& ([M \cup \{e_1, e_2\}] = P_k))$. Любая функция f реализуется формулой над $Q \stackrel{\text{def}}{=} M \cup \{e_1, e_2\}$. Покажем, что f реализуется и формулой над M. Доказываем индукцией по числу вхождений в формулу f селекторных функций. База: если селекторных функций нет, то доказывать нечего. Переход: возьмём в формуле

f селекторную функцию e_i. Её вхождение имеет вид $e_i(G_1, G_2)$, где G_1 и G_2 — переменные или формулы над Q. Заменим $e_i(G_1, G_2)$ на G_i. Применим предположение индукции. □

1.2.5. Критериальные системы в P_k. Теорема Кузнецова.

Пусть S — система замкнутых подмножеств P_k, т. е. $S \subset 2^{P_k}$ и $\forall M \in S\ ([M] = M)$. Система S называется *критериальной*, если $\forall M \subsetneq P_k$ $(([M] = P_k) \Leftrightarrow (\forall N \in S\ (M \nsubseteq N)))$. В P_2 система $\{T_0, T_1, \mathcal{M}, \mathcal{S}, \mathcal{L}\}$ является критериальной.

Теорема Кузнецова. Система $U(\mathcal{R}_k) = \{U(R_1), U(R_2), \ldots, U(R_{\rho(k)})\}$ является критериальной системой в P_k (при $k > 2$).
Доказательство.

Необходимость. Пусть $\mathcal{M}$ полно. Если $M \subseteq U(R_i)$, то $[M] \subseteq [U(R_i)] = U(R_i)$. Т. к. $\mathcal{M}$ полно, то $U(R_i) = [M] = P_k$, а $U(R_i) \cap P_k(x_1, x_2) = P_k(x_1, x_2)$. Но $U(R_i) \cap P_k(x_1, x_2) = R_i \neq P_k(x_1, x_2)$ — противоречие. □

Достаточность. Доказываем от противного. Пусть $\forall i \in 1, 2, \ldots, \rho(k)(M \nsubseteq U(R_i))$, но при этом $[M] \neq P_k$. Тогда по предыдущей лемме $[M \cup \{e_1, e_2\}] \neq P_k$. Обозначим $L = [M \cup \{e_1, e_2\}]$, $Q = L \cap P_k(x_1, x_2)$.
Лемма. Q — R-множество.

Доказательство. В самом деле, $Q \subset P_k(x_1, x_2)$, $e_1, e_2 \in Q$, $Q \neq P_k(x_1, x_2)$ (иначе в Q, а значит и в L лежит функция Вебба $\mathcal{V}_k(x_1, x_2) \stackrel{\text{def}}{=} \max(x_1, x_2) \oplus 1$, значит L полно, а это не так). Кроме того, Q сохраняет себя, т. к. L замкнуто. Значит, Q — R-множество. ◄ Заметим, что L сохраняет Q. Значит, $M \subseteq L \subseteq U(Q) = R_j$ — противоречие. □

1.2.6. Алгоритм проверки на полноту конечных систем в P_k.

Существование такого алгоритма следует из существования алгоритма, строящего все R_i и из теоремы Кузнецова. □

1.3. Теорема Слупецкого.

1.3.1. Лемма Яблонского.

Обозначения: $x(f)$ — множество существенных переменных функции f.
$|A|$ — мощность множества A. $|f|$ — мощность множества значений f.

Лемма. Пусть $f \in P_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $x(f) > 1$, $|f| \geqslant 3$. Тогда найдутся 3 набора:

- $\tilde{}\alpha^n = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$
- $\tilde{}\beta^n = (a_1, b_2, \ldots, b_n)$
- $\tilde{}\gamma^n = (b_1, a_2, \ldots, a_n)$

для которых $f(\tilde{}\alpha^n) \neq f(\tilde{}\beta^n) \neq f(\tilde{}\gamma^n) \neq f(\tilde{}\alpha^n)$
Доказательство. Пусть x_1 — существенная переменная. Тогда $\forall c_1, a_2, a_3, \ldots, a_n \in E_k \exists c_2 \in E_k(f(c_1, a_2, a_3, \ldots, a_n) \neq f(c_1, a_2, a_3, \ldots, a_n))$. Пусть A — множество значений в последовательности $f(0, a_2, a_3, \ldots, a_n), f(1, a_2, a_3, \ldots, a_n), \ldots, f(k-1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$, $|f| = l$
Возможны 2 случая.

1) $|A| < l$
В этом случае возьмём $\tilde{}\beta^n = (a_1, b_2, \ldots, b_n)$ со значением, которого нет в A. Теперь из A выберем 2 набора $\tilde{}\alpha^n = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ и $\tilde{}\gamma^n = (b_1, a_2, \ldots, a_n)$ такие, что $f(\tilde{}\gamma^n) \neq f(\tilde{}\alpha^n)$.

2) $|A| = l$
Если бы f однозначно определялась бы при фиксации первой переменной, то она зависела бы существенно только от одной переменной. Следовательно, существует фиксация первой переменной, при которой $f(a_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) \neq const$. Возьмём 2 набора $\tilde{}\alpha^n = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ и $\tilde{}\beta^n = (a_1, b_2, \ldots, b_n)$, такие что $f(\tilde{}\alpha) \neq f(\tilde{}\beta)$. Набор $\tilde{}\gamma^n = (b_1, a_2, \ldots, a_n)$, на котором значение f отличается от первых двух, существует потому, что в A достигаются все $l \geqslant 3$ значений. $\square$

Следствие. Пусть $f \in P_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $|x(f)| > 1$, $|f| = l \geqslant 3$. Тогда найдутся l наборов:

- $\tilde{}\alpha_1^n = (a_1^1, a_2^1, \ldots, a_n^1)$
- $\tilde{}\alpha_2^n = (a_1^2, a_2^2, \ldots, a_n^2)$

  ……………………

- $\tilde{}\alpha_l^n = (a_1^l, a_2^l, \ldots, a_n^l)$

для которых $f(\tilde{}\alpha_i^n) \neq f(\tilde{}\alpha_j^n)$ при $i \neq j$, причём в каждом столбце не более, чем $l-1$ различных элементов.

1.3.2. Лемма о равенстве $\left[P_k(x) \cup P_k^B\right] = P_k^{|B|} \cup P_k(x)$.

Обозначения: пусть $B \subseteq E_k$. $|B|$ — мощность множества.

$$P_k^B \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ f \in P_k : \forall \vec{x} \in \underbrace{E_k \times E_k \times \ldots \times E_k}_{|x(f)|}(f(\vec{x}) \in B) \right\}$$

Пусть $l \in \mathbb{N}$. P_k^l — множество всех функций из P_k, принимающих не более l значений. Очевидно, что P_k^l замкнуто.

Лемма. $\left[P_k(x) \cup P_k^B\right] = P_k^{|B|} \cup P_k(x)$ $(B \subseteq E_k,\ B \neq \varnothing)$

Доказательство. Пусть $f \in P_k^{|B|}$, $l = |b|$

$x_1, x_2, \ldots, x_n$	$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$	$g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$	x	$\xi(x)$
Наборы, на которых значение b_1	b_1	$c_1 \in B$	c_1	b_1
Наборы, на которых значение b_2	b_2	$c_2 \in B$	c_2	b_2
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
Наборы, на которых значение b_l	b_l	$c_l \in B$	c_l	b_l

В P_k^B найдётся функция g, которая на тех же наборах, где функция f принимает значения b_i, принимает различные значения c_i. В $P_k(x)$ найдётся функция $\xi : c_i \longmapsto b_i$. Тогда $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \xi(g(x_1, x_2, \ldots, x_n))$. Значит, $P_k^{|B|} \subseteq \left[P_k^B \cup P_k(x)\right]$, а значит и $P_k^{|B|} \cup P_k(x) \subseteq \left[P_k^B \cup P_k(x)\right]$. Осталось показать, что $P_k^{|B|} \cup P_k(x) \supseteq \left[P_k^B \cup P_k(x)\right]$, т.е. любая формула $\mathfrak{F}$ над множеством $P_k^B \cup P_k(x)$ реализует функцию из множества $P_k^{|B|} \cup P_k(x)$. Докажем это индукцией по построению формулы $\mathfrak{F}$. База: если $\mathfrak{F}$ — функция из $P_k^B \cup P_k(x)$, то доказывать нечего. Переход: если $\mathfrak{F}$ имеет вид $f(G)$, где $f \in P_k(x)$, G — переменная, или функция одной переменной, то $f \circ G$— тоже функция одной переменной. Если G — функция, принимающая не более, чем $|B|$ значений, то $f \circ G$ тоже принимает не более, чем $|B|$ значений. Если же $\mathfrak{F}$ имеет вид $f(G_1, G_2, \ldots, G_n)$, где f принимает не более, чем $|B|$ значений, то $f(G_1, G_2, \ldots, G_n)$ — тоже принимает не более, чем $|B|$ значений. $\square$

1.3.3. Лемма о включении $[P_k(x) \cup \{f\}] \supseteq P_k^{E_2}$ при $k > 2$, f - существенной функции.

Функция $f \in P_k$ называется *существенной*, если $|x(f)| > 1$ и $|f| = k$.

Лемма 1. Пусть f - существенная функция ($k > 2$). Тогда найдётся функция $g(\cdot, \cdot) \in [P_k(x) \cup \{f\}]$, обладающая следующими свойствами:

- $g \in P_k^{E_2}$.
- $g\,|_{E_2 \times E_2} \notin \mathcal{L}$ (На наборах из 0 и 1 g не линейна).

Доказательство. По лемме Яблонского для функции f найдутся 3 набора $\tilde{}\alpha^n = (a_1, a_2, \ldots, a_n), \tilde{}\,\beta^n = (a_1, b_2, \ldots, b_n), \tilde{}\,\gamma^n = (b_1, a_2, \ldots, a_n)$, такие что $f(\tilde{}\alpha^n) \neq f(\tilde{}\beta^n) \neq f(\tilde{}\gamma^n) \neq f(\tilde{}\alpha^n)$. Определим функции $\xi_i : E_2 \longrightarrow E_k$ для $i = 1, 2, \ldots, n$ следующим образом: $\xi_i : 0 \longmapsto a_i, 1 \longmapsto b_i$. Заметим, что эти функции удовлетворяют таблице:

x_1	x_2	$\xi_1(x_1)$	$\xi_2(x_2)$	$\xi_3(x_2)$	$\ldots$	$\xi_n(x_2)$
0	0	a_1	a_2	a_3	$\ldots$	a_n
0	1	a_1	b_2	b_3	$\ldots$	b_n
1	0	b_1	a_2	a_3	$\ldots$	a_n
1	1	b_1	b_2	b_3	$\ldots$	b_n

Положим $h(x_1, x_2) \stackrel{\text{def}}{=} f(\xi_1(x_1), \xi_2(x_2), \ldots, \xi_n(x_2))$.

$$\begin{aligned} f(a_1, a_2, \ldots, a_n) &= a \\ f(a_1, b_2, \ldots, b_n) &= b \\ f(b_1, a_2, \ldots, a_n) &= c \\ f(b_1, b_2, \ldots, b_n) &= d \end{aligned}$$

Возможны 2 случая:

- a, b, c, d попарно различны. В этом случае возьмём функцию $\tau \in P_k^{E_2} \cap P_k(x)$ такую, что $\tau : a, b, c \longmapsto 0, d \longmapsto 1$. $g(x_1, x_2) \stackrel{\text{def}}{=} \tau(h(x_1, x_2))$ — искомая функция (Заметим, что $g \in [P_k(x) \cup \{f\}]$).
- d с чем-то совпало. Пусть, для определённости, $d = a$. Сделаем всё аналогично первому случаю, но здесь $\tau : a, b, d \longmapsto 0, c \longmapsto 1$. ◀

Лемма 2. Пусть $k > 2$, $M = P_k(x) \cup \{f\}$, где f — существенная функция. Тогда $\forall h \in P_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \exists g \in P_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) \cap [M] \cap P_K^{E_2}$ $\left(h = g \,\Bigg|\, \underbrace{E_2 \times E_2 \times \ldots \times E_2}_{n}\right)$

Доказательство. По лемме 1 $\exists g(\cdot,\cdot) \in [M] \cap P_k^{E_2}$ $(g|_{E_2\times E_2} \notin \mathcal{L})$. Положим $\nabla(x) = \begin{cases} \bar{x}, & \text{если } x \in E_2; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$

Пусть $N \overset{\text{def}}{=} \{g, \nabla, 0, 1\}$ Заметим, что $\forall \varphi \in N \left(\varphi \Big|_{\underbrace{E_2 \times E_2 \times \ldots \times E_2}_{|x(\varphi)|}} \in P_2 \right)$.

Более того, если рассматривать их как функции из P_2, то $g \notin \mathcal{L}$, $\nabla \notin \mathcal{M}$, $\nabla \notin T_0$, $\nabla \notin T_1$, $0 \notin \mathcal{S}$. Значит, N — полная система в P_2. Кроме того, $N \subseteq M \cap P_k^{E_2}$. Пользуясь полнотой системы N, запишем формулу над N, реализующую функцию $h \Big|_{\underbrace{E_2 \times E_2 \times \ldots \times E_2}_{n}}$ Если рассматривать эту формулу как реализующую функцию из P_k, то реализуемая ей функция будет искомой функцией g. А так как $N \subseteq M$, то A — формула над M. ◀

Лемма. Пусть $k > 2$, f — существенная функция. Тогда $P_k^{E_2} \subseteq [P_k(x) \cup \{f\}]$.

Доказательство. Возьмём функцию $\lambda \in P_k^{E_2}$, тогда $\lambda(x_1, x_2, \ldots, x_n) =$
$\bigvee\limits_{(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n)} J_{\sigma_1}(x_1) \& J_{\sigma_2}(x_2) \& \ldots \& J_{\sigma_n}(x_n) \& \lambda(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) =$
$\bigvee\limits_{(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n)} j_{\sigma_1}(x_1) \& j_{\sigma_2}(x_2) \& \ldots \& j_{\sigma_n}(x_n) \& \lambda(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) =$
$\dot{\bigvee\limits_{(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n)}} j_{\sigma_1}(x_1) \dot{\&} j_{\sigma_2}(x_2) \dot{\&} \ldots \dot{\&} j_{\sigma_n}(x_n) \dot{\&} \lambda(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ — формула над M.
В этой формуле операции $\dot{\&}$ и $\dot{\vee}$ на 0 и 1 совпадают с $\&$ и $\vee$, а на остальных значениях — нули. □

Следствие. Если $k > 2$, $M = P_k(x) \cup \{f\}$, f — существенная функция, то $P_k^2 \subseteq [M]$.

Доказательство. Как было доказано, $P_k^{E_2} \subseteq [M]$. Но $M \supseteq P_k(x)$. Поэтому $P_k^{E_2} \cup P_k(x) \subseteq [M]$, а значит и $\left[P_k^{E_2} \cup P_k(x)\right] \subseteq [M]$. Кроме того, по лемме из предыдущего раздела (1.3.2) имеем: $\left[P_k^{E_2} \cup P_k(x)\right] = P_k^2 \cup P_k(x)$. Итак, $P_k^2 \subseteq P_k^2 \cup P_k(x) = \left[P_k^{E_2} \cup P_k(x)\right] \subseteq [M]$. □

1.3.4. Лемма о включении $[P_k(x) \cup \{f\}] \supseteq P_k^{l+1}$ при $k > 2$, f - существенной функции, $1 < l < k$ и включении $[P_k(x) \cup \{f\}] \supseteq P_k^l$.

Доказательство. По следствию из леммы Яблонского найдутся такие наборы:

$$\begin{array}{lcl} f(a_1, a_2, \ldots, a_n) & = & a \\ f(b_1, a_2, a_3, \ldots, a_n) & = & b \\ f(a_1, b_2, b_3, \ldots, b_n) & = & c \\ f(c_{1,1}, c_{1,2}, \ldots, c_{1,n}) & = & d_1 \\ f(c_{2,1}, c_{2,2}, \ldots, c_{2,n}) & = & d_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & \\ f(c_{(l-2),1}, c_{l-2,2}, \ldots, c_{l-2,n}) & = & d_{l-2} \end{array}$$

Положим $B = \{a, b, c, d_1, d_2, \ldots, d_{l-2}\}$. Возьмём произвольную функцию $h \in P_k^B$.

$x_1, x_2, \ldots, x_n$	$h(x_1, x_2, \ldots, x_n)$	$\xi_1(\vec{x})$	$\xi_2(\vec{x})$	$\ldots$	$\xi_n(\vec{x})$	$f(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n)$
Наборы, на которых $h = a$	a	a_1	a_2	$\ldots$	a_n	a
Наборы, на которых $h = b$	b	b_1	a_2	$\ldots$	a_n	b
Наборы, на которых $h = c$	c	a_1	b_2	$\ldots$	b_n	c
Наборы, на которых $h = d_1$	d_1	$c_{1,1}$	$c_{1,2}$	$\ldots$	$c_{1,n}$	d_1
Наборы, на которых $h = d_2$	d_2	$c_{2,1}$	$c_{2,2}$	$\ldots$	$c_{2,n}$	d_2
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ddots$	$\ldots$	$\ldots$
Наборы, на которых $h = d_{l-2}$	d_{l-2}	$c_{l-2,1}$	$c_{l-2,2}$	$\ldots$	$c_{l-2,n}$	d_{l-2}

$\xi_i \in P_k^l$. Как видно из таблицы, $h(\vec{x}) = f(\xi_1(\vec{x}), \xi_2(\vec{x}), \ldots, \xi_n(\vec{x}))$. Таким образом, произвольная функция из P_k^B представляется формулой над $M = P_k(x) \cup \{f\}$, то есть $P_k^B \subseteq [M]$. $|B| = l + 1$. По лемме из раздела 1.3.2 имеем $P_k^{l+1} \subseteq [M]$ (см. доказательство следствия из предыдущей леммы (раздел 1.3.3)). □

1.3.5. Теорема Слупецкого.

Система Слупецкого — это множество M вида $M = N \cup P_k(x)$, где $N \subseteq P_k$.

Теорема *(Критерий Слупецкого)*. Система Слупецкого $M = N \cup P_k(x)$ полна в P_k при $k > 2 \Longleftrightarrow N$ содержит существенную функцию f.

Доказательство.

$\Longleftarrow$ Применим лемму из раздела 1.3.3, затем $k-2$ раза лемму из раздела 1.3.4. □

$\Longrightarrow$ Пусть существенной функции нет, тогда $N \subseteq P_k^{k-1}$. Надо показать, что любая формула $\mathfrak{F}$ над M лежит в $P_k^{k-1} \cup P_k(x)$. Доказательство аналогично доказательству из леммы 1.3.2. □

1.4. Особенности k-значной логики.

1.4.1. Теорема о полноте класса полиномов в P_k.

Система полиномов полна в P_k тогда и только тогда, когда k — простое число.

Доказательство. Прежде всего заметим, что любая функция в P_k представима в виде $\bigoplus\limits_{(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n)} j_{\sigma_1}(x_1)j_{\sigma_2}(x_2)\ldots j_{\sigma_n}(x_n)f(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n)$. Поэтому система полиномов полна в P_k тогда и только тогда, когда представима в виде полинома функция $j_0(x)$ ($j_i(x) = j_0(x \oplus k - i)$).

Необходимость. Пусть $k = m \cdot l$, где $m, l \in \mathbb{Z}$. Предположим, что $j_0(x) = a_n x^n \oplus a_{n-1}x^{n-1} \oplus \ldots \oplus a_1 x \oplus a_0$. Тогда $a_0 = 1$, так как $j_0(0) = 1$. Рассмотрим $j_0(m)$. С одной стороны, это нуль. С другой стороны, $j_0(m) = a_n m^n \oplus a_{n-1}m^{n-1} \oplus \ldots \oplus a_1 m \oplus 1$. Значит, $a_n m^n \oplus a_{n-1}m^{n-1} \oplus \ldots \oplus a_1 m = k-1$, то есть $(k-1) \vdots m$. Но $k > 1$, и тоже делится на m. А такого не бывает. □

Достаточность. $j_0(x) = (k-1)x^{k-1} \oplus 1$. (доказательство — Малая теорема Ферма). □

1.4.2. Континуальность множества замкнутых классов в P_k при $k > 2$.

Теорема Янова. При $k \geqslant 3$ в P_k существует замкнутый класс, имеющий счётный базис.

Доказательство. Рассмотрим последовательность функций f_i, $(i = 2, 3, \ldots)$.

$$f_i(x_1, x_2, \ldots, x_i) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1, & \text{если } x_1 = x_2 = \ldots = x_{j-1} = x_{j+1} = \ldots = x_i = 2, x_j = 1, 1 \leqslant j \leqslant i; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}.$$

Положим $N = \{f_2, f_3, \ldots\}$, $M = [N]$. Докажем, что N — базис в M, т. е. $\forall m \in \mathbb{N}_{\geqslant 2}\,(f_m \notin [N \setminus \{f_m\}])$. Предположим, что $\exists m \in \mathbb{N}_{\geqslant 2}\,(f_m \in [N \setminus \{f_m\}])$, т. е. f_m выражается через функции $N \setminus \{f_m\}$.
$f_m(x_1, x_2, \ldots, x_m) = f_r(A_1, A_2 \ldots, A_r)$. Возможны 3 случая:

1) Среди $A_1, A_2, \ldots, A_r$ есть по крайней мере 2 символа, отличные от переменных, например A_{i_1}, A_{i_2}. В этом случае то, что стоит в правой части — тождественный нуль, т. к. функция f принимает значения только 0 и 1, а если есть целых два аргумента, не равных 2, то $f = 0$. Значит, $f \equiv 0$, что не так.

2) Среди $A_1, A_2, \ldots, A_r$ есть ровно один символ, отличный от переменной, например A_s. Т. к. $r > 2$ и $m > 2$, то $\exists q \leqslant \min(r, m)(A_q$— символ переменной). Зададим значения переменных: $x_1 = x_2 = \ldots = x_{q-1} = x_{q+1} = \ldots = x_m$, $x_q = 1$. Слева будет 1, а справа — 0.

3) Все $A_1, A_2, \ldots, A_r$ — символы переменных. Т. к. все переменные у функции f — существенные, то их одинаковое количество, значит и функция одна и та же. ◀

Теорема. Множество замкнутых классов в P_k при $k > 2$ имеет мощность континуум.

Доказательство.

- Мощность множества замкнутых классов не больше, чем континуум. P_k не более, чем счётно, значит 2^{P_k} не более, чем континуально, а множество замкнутых классов в нём содержится. ◀

- Мощность множества замкнутых классов не меньше, чем континуум. Пусть $N = f_2, f_3, \ldots$ — множество из предыдущей теоремы. Рассмотрим множество: $Q = \{[P] : P \subseteq N\}$.(По теореме Янова все $[P]$ различны). Q является подмножеством множества замкнутых классов и имеет мощность континуум. $\square$