

Теория вероятностей

Лектор: профессор Сенатов В.В.

Статус курса: основной

Предназначен для студентов 2 курса, 4 семестр

Продолжительность: полгода (весна)

Форма отчетности: зачет, экзамен

Программа на 2008/2009 учебный год

1. Вероятностное пространство как математическая модель эксперимента со случайными исходами. Частота события, ее свойства. Устойчивость частот реальных случайных событий. Математические модели экспериментов со случайными исходами. Операции над реальными событиями и операции над множествами, являющимися моделями этих событий. Алгебры и σ -алгебры множеств. Измеримые пространства. Меры, их свойства. Пространства с мерами. Вероятностные пространства. Простейшие свойства вероятности.
2. Дискретные вероятностные пространства. Классическое определение вероятности. Построение простейших вероятностных пространств, урновые схемы. Элементы комбинаторики. Биномиальное распределение как распределение числа успехов в схеме выбора с возвращением.
3. Условная вероятность. Формула полной вероятности. Формула Байеса. Независимые события. Независимость попарная и в совокупности. Построение вероятностных пространств для сложных экспериментов; прямое произведение вероятностных пространств.
4. Дискретные случайные величины. Распределение вероятностей случайной величины (вектора). Функция распределения. Совместное распределение. Маргинальные распределения для данного совместного распределения. Независимость случайных величин в элементарном случае (три эквивалентных определения).
5. Математическое ожидание дискретной случайной величины и его вычисление через распределение вероятностей. Свойства математического ожидания. Дисперсия, ее свойства. Ковариация, коэффициент корреляции. Неравенство Чебышева. Закон больших чисел (ЗБЧ) в форме Чебышева. ЗБЧ в форме Бернулли.
6. Вероятностная модель эксперимента с произвольным множеством исходов. Аксиоматика Колмогорова. Аксиомы и основные свойства вероятности. Пределы последовательностей событий. Связь между счетной аддитивностью и непрерывностью вероятности. Минимальная σ -алгебра. Продолжение меры. Теорема Каратеодори (без доказательства). Борелевские множества в \mathbb{R}^1 и в \mathbb{R}^n .
7. Случайные величины. Замкнутость множества случайных величин относительно арифметических операций и предельного перехода. Функции от случайных величин. Распределение вероятностей, порожденное случайной величиной. Функция распределения. Взаимно однозначное соответствие между распределениями и функциями распределения.
8. Абсолютно непрерывные распределения; плотности распределений. Примеры абсолютно непрерывных распределений (равномерное, экспоненциальное, Коши, нормальное). Сингулярные и дискретные распределения. Пример сингулярного распределения (распределение Кантора). Теорема Лебега (без доказательства). Совместное и маргинальные распределения совокупности случайных величин. σ -алгебра, порожденная случайной величиной. Независимость случайных величин.
9. Математическое ожидание случайной величины, интеграл Лебега, его основные свойства. Предельный переход под знаком интеграла, формула замены переменных под знаком интеграла Лебега. Вычисление математического ожидания функций от случайной величины по ее распределению вероятностей. Интеграл Римана-Стилтьеса. Моменты. Смысл параметров нормального распределения. Связь между существованием моментов и поведением «хвостов» функции распределения.

10. Сходимости на множестве случайных величин. Сходимость по вероятности. Неравенство Чебышева. ЗБЧ. Сходимость почти наверное. Критерий сходимости почти наверное. Неравенство Колмогорова. Сходимость рядов из независимых случайных величин. Усиленный ЗБЧ. Связь между сходимостью по вероятности и сходимостью почти наверное.
11. Суммы независимых случайных величин. Формула свертки. Поведение распределений (ненормированных) сумм случайных величин при росте числа слагаемых (независимые одинаково распределенные случайные величины с конечной дисперсией). Нормированные суммы. Формулировка центральной предельной теоремы (ЦПТ).
12. Виды сходимости на множестве функций распределения. Сходимость в основном. Множества функций P и \overline{P} . Компактность множества \overline{P} . Слабая сходимость \implies . Метризуемость сходимости \implies , метрика Леви. Критерий относительной компактности в метрике Леви.
13. Связи между сходимостью в метрике Леви и сходимостями равномерной и в среднем. Сходимость \xrightarrow{w} . Эквивалентность сходимостей \implies и \xrightarrow{w} . Связь между сходимостью по вероятности случайных величин и слабой сходимостью их функций распределения.
14. Характеристические функции. Примеры характеристических функций. Взаимная однозначность соответствия между распределениями и характеристическими функциями; формула обращения (для функций распределения и для плотностей, без доказательства). Взаимная непрерывность соответствия между распределениями и характеристическими функциями. Характеристическая функция суммы независимых случайных величин. Другие свойства характеристических функций.
15. Доказательство ЦПТ для независимых одинаково распределенных величин (метод характеристических функций).
16. Различия в ЗБЧ и в ЦПТ для одинаково и различно распределенных слагаемых. Условие Ляпунова (без доказательства). Теорема Линдберга-Феллера (без доказательства). Теорема Пуассона.

Литература

1. *Ширяев А.Н.* Вероятность. Т. 1, 2. М.: МЦНМО, 2004.
2. *Ширяев А.Н.* Задачи по теории вероятностей. М.: МЦНМО, 2004.
3. *Гнеденко Б.В.* Курс теории вероятностей, М., Наука, 1988.
4. *Севастьянов Б.А.* Курс теории вероятностей и математической статистики. М.: Наука, 1982.
5. *Зубков А.М., Севастьянов Б.А., Чистяков В.П.* Сборник задач по теории вероятностей. М.: Наука, 1989.
6. *Мешалкин Л.Д.* Сборник задач по теории вероятностей. М.: Наука. 1963.
7. *Прохоров А.В., Ушаков В.Г., Ушаков Н.Г.* Задачи по теории вероятностей. М.: Наука, 1986.

Доп. литература

1. *Сенатов В.В.* Центральная предельная теорема. Точность аппроксимации и асимптотические разложения. М.: Либроком, 2009.
2. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 1, 2. М.: Мир, 1984.
3. *Гихман И.И., Скороход А.В.* Введение в теорию случайных процессов. М.: Наука, 1968.